مذكرة التفاضل

النهايات والاتصال

الصف الثانى الثانوى

القسم الأدبى

الفصل الدراسى الأول ٢٠٢٠

منتدى توجيه الرياضيات
أ/ عادل إدوار

النهايـــات والأتصال

- مقدمة إيجاد النهاية عدديا وبيانيا
- نهاية دالة عند نقطة جبريا.
- نظرية (٤) القانون.
- نهاية دالة عند اللانهاية.

النهــــــــــــــايــــــــــــــات

(١) مفاهيم ورموز وتمهيدات

ح = مجموعة الأعداد الحقيقية =] – ∞ ، ∞ [

ح⁺ = مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة =] ٠ ، ∞ [

ح⁻ = مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة =] – ∞ ، ٠ [

** أنواع الكميات :

(١) الكمية المعينة : هى الكمية التى لها جواب محدد مثل : ٣ – ٥ ، ٩ × ٨ ، ٧ ÷ ٤

(٢) الكمية غير المعرفة : هى الكمية التى لا معنى لها مثل : أ/٠ ، أ ≠ ٠

---

(٢) الرمزان ∞ ، – ∞ :

❖ الرمز ∞ يرمز لأى كمية تكون أكبر من أى عدد حقيقى موجب يمكن إدراكه

❖ الرمز – ∞ يرمز لأى كمية تكون أصغر من أى عدد حقيقى سالب يمكن إدراكه

❖ إذا كان : أ ∈ ح فإن : ∞ ± أ = ∞ ، – ∞ ± أ = – ∞

، ∞ × أ =
- ∞ عندما أ > ٠
- – ∞ عندما أ < ٠
- كمية غير معينة عندما أ = ٠

– ∞ × أ =
- – ∞ عندما أ > ٠
- ∞ عندما أ < ٠
- كمية غير معينة عندما أ = ٠

(٣) الكمية الغير المعينة : هى الكمية التى لا نستطيع أن نجد لها جواباً محدداً حيث يكون لها عدد لا نهائى من الحلول مثل : $\frac{صفر}{صفر}$ " كمية غير معينة "

* يوجد عدد لا نهائى من الأعداد الحقيقية إذا ضربت فى صفر كان الناتج = صفراً

∵ ٠ × أى عدد = ٠ ∴ $\frac{صفر}{صفر}$ = أى عدد (غير معينة)

∵ ∞ × أى عدد = ∞ ∴ $\frac{\infty}{\infty}$ = أى عدد (غير معينة)

∵ ∞ + أى عدد = ∞ ∴ ∞ ـ ∞ = أى عدد (غير معينة)

∵ $\frac{أى عدد}{\infty}$ = صفر ∴ ٠ × ∞ = أى عدد (غير معينة)

العامل الصفرى :

إذا كانت د دالة فى المتغير س على صورة كثيرة حدود من درجة ن وكانت د (م) = ٠ حيث م ∈ ح فإن المقدار (س ـ م) يسمى العامل الصفرى للدالة د

وهذا يعنى أن : د (س) يقبل القسمة على (س ـ م) بدون باق

أى أن : د (س) = (س ـ م) × كثيرة حدود أخرى

** مفهوم الرمز " ← " فى النهايات :

إذا تصورنا أن س نقطة تتحرك على خط الأعداد

فإن موضعها عند كل نقطة أثناء حركتها يعين عدداً حقيقياً ما .

قيل أن س تقترب من العدد ٢ من خلال قيم أكبر قليلاً من العدد ٢ تقترب ٢ من اليمي

أ، قيل أن س تقترب من العدد ٢ من خلال قيم أصغر قليلاً من العدد ٢ تقترب ٢ من اليسار

وإذا أقتربت س من العدد ٢ من جهة اليمين ومن اليسار قيل إن س تقترب من العدد ٢

ونعبر عن ذلك رمزياً بالصورة : س ← ٢

مفهوم نهاية دالة عند نقطة

إذا أردنا إيجاد قيمة الدالة د : د(س) = $\frac{س^{٢} - ١}{س - ١}$ عند س = ١

بالتعويض عن قيمة س = ١ فإن د(١) = $\frac{(١)^{٢} - ١}{١ - ١}$ = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ كمية غير معينة

ولذلك نلجأ إلى دراسة نهاية د(س) عندما س تقترب إلى العدد (١)

[١] الطريقة العددية

	س تقترب جداً من (١) من اليمين ⟸						س تقترب جداً من (١) من اليسار ⟹				
س	١,٤	١,٣	١,٢	١,١	١,٠١	١	٠,٩٩	٠,٩	٠,٨	٠,٧	٠,٦
د(س)	٢,٤	٢,٣	٢,٢	٢,١	٢,٠١	غير معينة	١,٩٩	١,٩	١,٨	١,٧	١,٦
	د(س) تقترب جداً من (٢) من اليمين ⟸						⟹ د(س) تقترب جداً من (٢) من اليسار				

وهذه الطريقة تسمى $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ د(س) = ٢

وتقرأ : نهاية د(س) عندما تقترب س من ١ تساوى ٢

تعريف :

إذا كانت قيمة الدالة د تقترب من قيمة وحيدة (ل) عندما تقترب س من م من جهتى اليمين واليسار فإن نهابة د(س) تساوى (ل) وتكتب رمزياً $\underset{س \leftarrow م}{\text{نهـا}}$ د(س) = ل

[٢] تقدير النهاية بيانياً

د(س) = $\frac{س^{٢} - ١}{س - ١}$ غير معينة عند س ⟵ ١

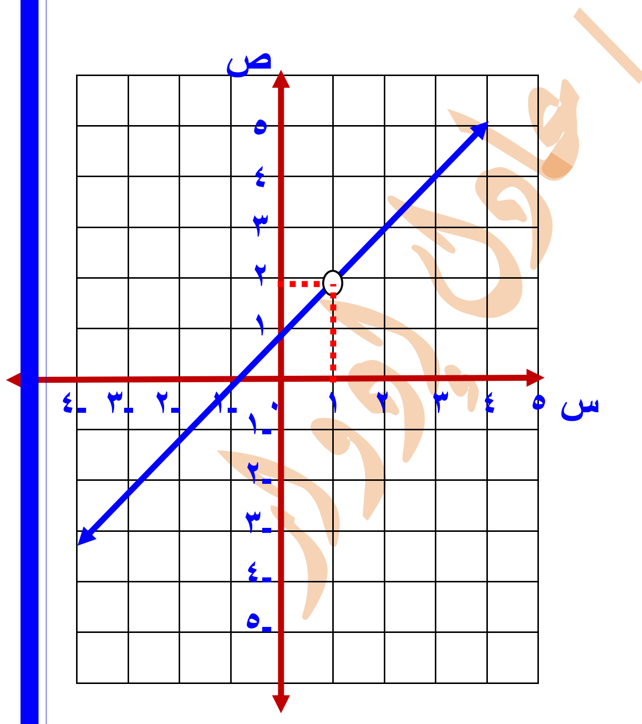
د(س) = $\frac{(س - ١)(س + ١)}{(س - ١)}$ = (س + ١)

ومن الرسم نجد أن د (س) = ١+١=٢

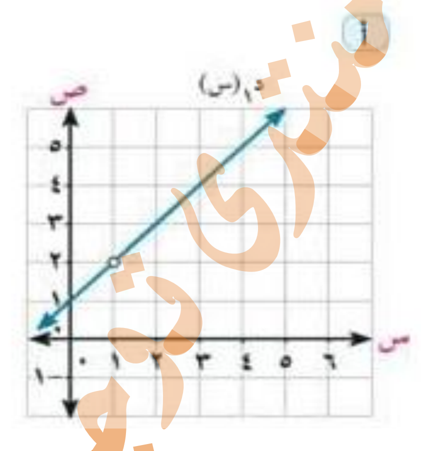
عندما : س ⟵ ١ من اليمين واليسار

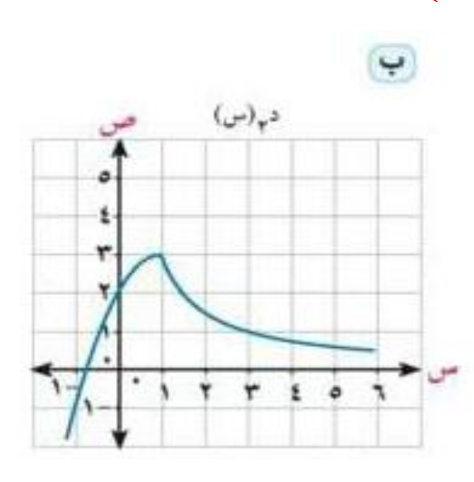
فإن د(س) ⟵ ٢ من فوق وتحت

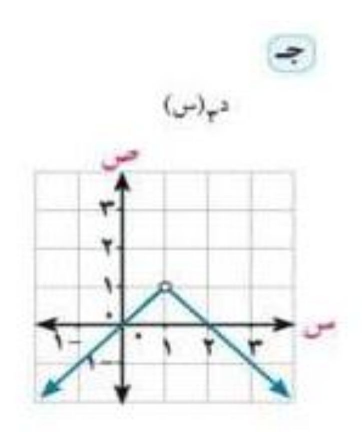
فيكون : $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ د(س) = ٢



مثـــ١ـــال : قدر نهاية الدالة د(س) عندما س ⟵ ١

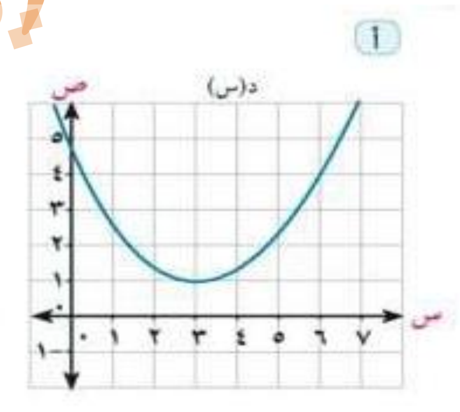


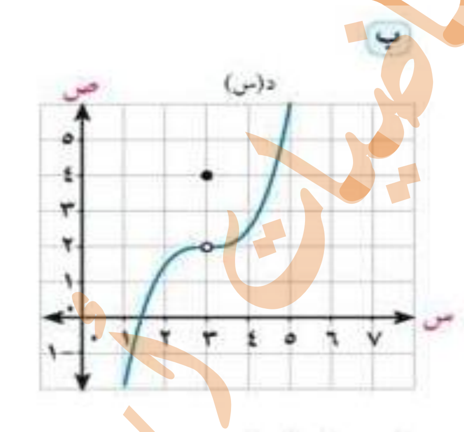


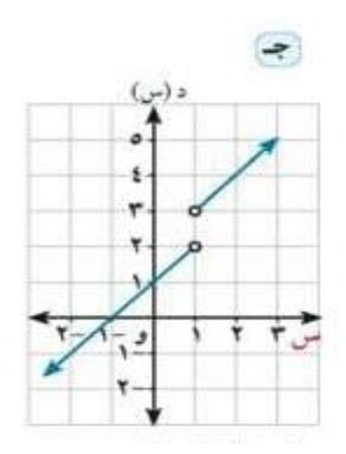


أ) نهـــا (س ⟵ ١) د(س) = ٢ ب) نهـــا (س ⟵ ١) د(س) = ٣ جـ) نهـــا (س ⟵ ١) د(س) = ١

مثـــ٢ـــال : قدر نهاية الدالة د(س) عند النقط المبينة









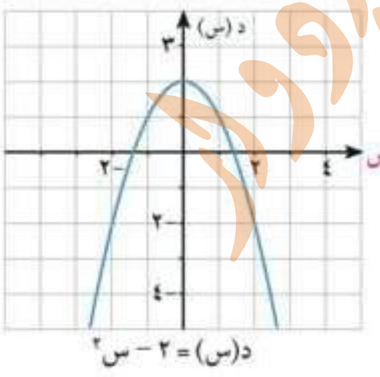
أ) نهـــا (س ⟵ ٣) د(س) = ١ ب) نهـــا (س ⟵ ٣) د(س) = ٢ جـ) نهـــا (س ⟵ ١) د(س) = غير موجودة

ليس من الضرورى أن قيمة الدالة تساوى قيمة النهاية

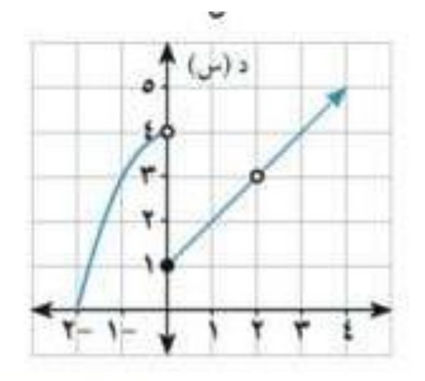
مثـــ٣ـــال : من الشكل البيانى المقابل

أ) نهـــا (س ⟵ ٠) (٢ ـ $س^٢$) = ٢

ب) د(صفر) = ٢



مثــ٤ــال : من الشكل البيانى المقابل



أ د(٠) = ١   ب د(٢) غير معرفة

جـ $\lim_{س \to ٠}$ د (س) = غير موجودة

د $\lim_{س \to ٢}$ د (س) = ٣

مثــ٥ــال: أكمل الجدول الآتى وأستنتج $\lim_{س \to ٢} \frac{(س^٢ - ٤)}{(س - ٢)}$

س	١,٩	١,٩٩	١,٩٩٩	٢	٢,٠٠١	٢,٠١	٢,١
د(س)	٣,٩	٣,٩٩	٣,٩٩٩	٤	٤,٠٠١	٤,٠١	٤,١

د(س) = $\frac{(س^٢ - ٤)}{(س - ٢)}$ غير معينة عند س ← ١

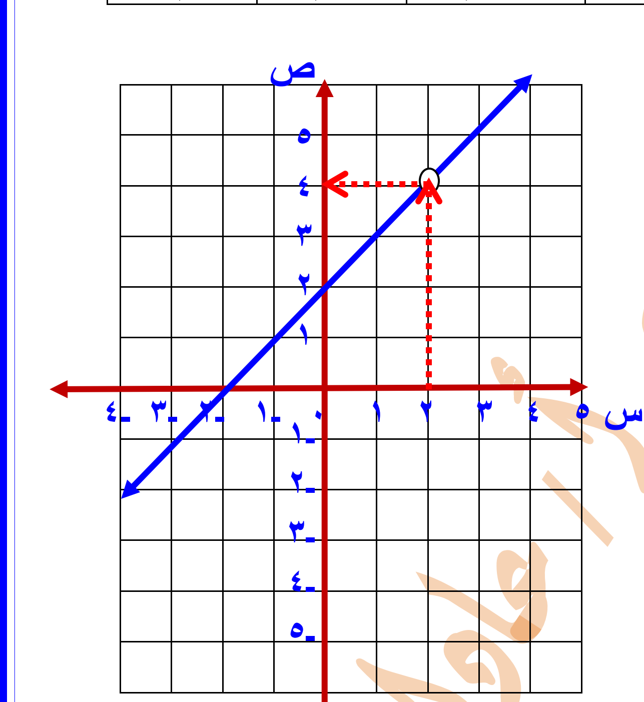
د(س) = $\frac{(س - ٢)(س + ٢)}{(س - ٢)}$ = (س + ٢)

ومن الرسم نجد أن د (س) = ٢+٢=٤

عندما : س ← ٢ من اليمين واليسار

فإن د(س) ← ٤ من فوق وتحت

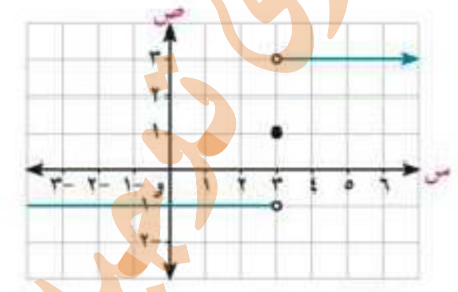
فيكون : $\lim_{س \to ٢}$ د(س) = ٤

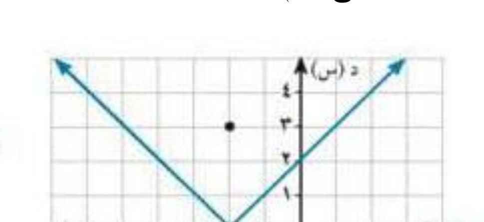


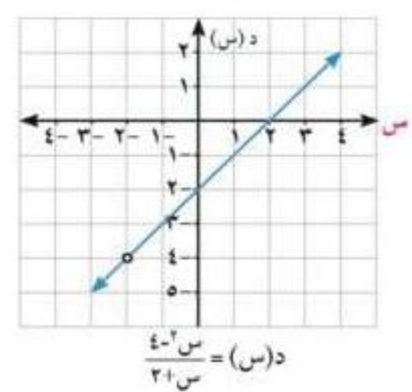
تمـــارين

(١) قدّر نهاية الدالة د(س) عند النقط المبينة

Ⓐ $\underset{س \to ٣}{\text{نهـــا}}$ د(س)   Ⓑ $\underset{س \to -٢}{\text{نهـــا}}$ د(س)   Ⓒ $\underset{س \to ٢}{\text{نهـــا}}$ د(س)

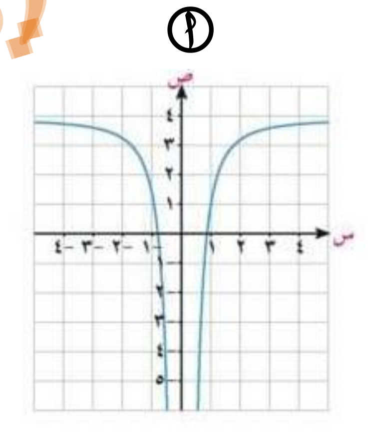


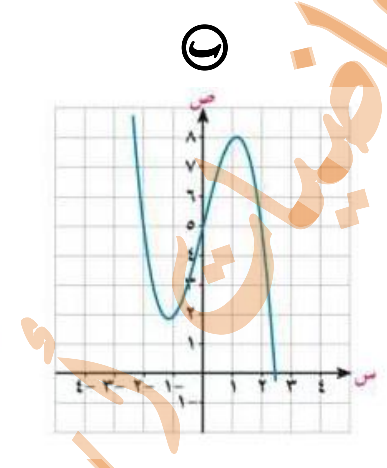


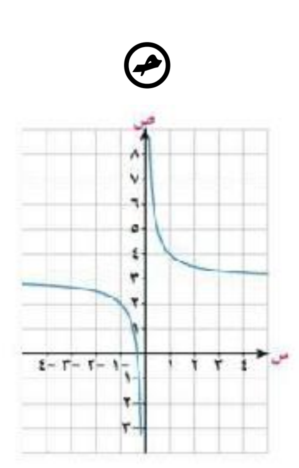


(٢) قدّر نهاية الدالة د(س) عند س ← صفر

Ⓐ   Ⓑ   Ⓒ







(٣) أكمل الجدول الآتى وأستنتج $\underset{س \to -١}{\text{نهـــا}} \frac{(س^2 - ١)}{(س - ١)}$

س	-١,١	-١,٠١	-١,٠٠١	-١	-٠,٩٩٩	-٠,٩٩	-٠,٩
د(س)				؟؟؟؟			

(٤) باستخدام الحاسبة قدّر نهاية الدوال الآتية

Ⓐ $\underset{س \to ٢}{\text{نهـــا}}$ (٣س − ١)   Ⓑ $\underset{س \to ١}{\text{نهـــا}}$ (س^2 + ٢)

Ⓒ $\underset{س \to ١}{\text{نهـــا}} \frac{(س - ١)}{(س^3 - ١)}$ Ⓓ $\underset{س \to ٣}{\text{نهـــا}} \frac{(س^2 - ٤س + ٣)}{(س - ٣)}$

نهاية دالة عند نقطة

مثال : إذا كانت د (س) = ٣ س + ٤ إوجد د (س) عندما س ← ٠

الحـــــــــل

∵ س ← ١ ∴ نضع س = ١ + هـ حيث عندما س ← ١ فإن هـ ← ٠

∴ د (س) = ٣ (١ + هـ) + ٤ = ٣ + ٣ هـ + ٤ = ٧ + ٣ هـ

∴ د (س) ← ٧ عندما س ← ١

أى أن نهاية الدالة د(س) تساوى ٧ عندما س تؤول إلى ١

ويعبر عن ذلك بالصورة : نهـــــا$_{\text{س} \leftarrow ١}$ (٣ س + ٤) = ٧

ملاحظة : فى المثال السابق نحصل على نفس النتيجة بالتعويض المباشر

نظرية : نهاية دالة كثيرة الحدود

نظـــرية (١)

* إذا كانت د (س) كثيرة حدود فى المتغير س فإن : نهـــــا$_{\text{س} \leftarrow م}$ د (س) = د (م)

فمثلا : نهـــــا$_{\text{س} \leftarrow ٣}$ (٣ س + ٤) = د (٣) = ٣ × ٣ + ٤ = ١٣

نتيجة : نهاية الدالة الثابتة : إذا كانت د (س) = ك حيث ك ثابت

فإن : نهـــــا$_{\text{س} \leftarrow م}$ د : (س) = ك

فمثلا : د (س) = ٤ ، نهـــــا$_{\text{س} \leftarrow ٢}$ د(س) = ٤

نظرية (٢) : إذا كانت د ، ر دالتين فى المتغير س

وكانت : د (س) = ل ، ر (س) = م فإن :

(١) نهـــــا$_{\text{س} \leftarrow م}$ [د (س) ± ر (س)] = نهـــــا$_{\text{س} \leftarrow م}$ د (س) ± نهـــــا$_{\text{س} \leftarrow م}$ ر (س)

= ل ± م

أى أن :

نهاية المجموع الجبرى لدالتين (أو أكثر) = المجموع الجبرى لنهايتيهما (للنهايات)

(٢) نهـــــا [د (س) × م (س)] = نهــــا د (س) × نهــــا م (س)
س ← أ س ← أ س ← أ

= ل × م

أى أن : نهاية حاصل ضرب دالتين (أو أكثر) = حاصل ضرب نهايتيهما (النهايات)

(٣) نهــــا ك × د (س) = ك نهــــا د (س) = ك × ل حيث ك ثابت
س ← أ س ← أ

أى أن : نهاية حاصل ضرب ثابت × دالة = الثابت × نهاية هذه الدالة

(٤) نهـــــا $\frac{\text{د (س)}}{\text{م (س)}}$ = $\frac{\text{نهـــا د (س)}}{\text{نهـــا م (س)}}$ = $\frac{\text{ل}}{\text{م}}$ حيث : م ≠ صفر
س ← أ

أى أن :

نهاية خارج قسمة دالتين = خارج قسمة نهايتيهما حيث : نهاية المقسوم عليه ≠ صفر

لإيجاد: نهــــا د (س) نوجد د (أ) بالتعويض المباشر فإذا كان الناتج :
س ← أ

١ ــ عدداً حقيقياً فإن نهاية الدالة عند س = أ هى هذا العدد الحقيقى

٢ ــ $\frac{\text{عدداً حقيقى} \neq \text{الصفر}}{\text{صفر}}$ " كمية غير معرفة " فإن الدالة لا يكون لها نهاية عند أ

٣ ــ $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ كمية غير معينة تستخدم النظرية التالية

٤ ــ $\frac{\text{أ}}{\pm \infty}$ = صفر

نظرية (٣) : إذا كانت د ، ق دالتين فى المتغير س

وكانت د (س) = ق (س) لجميع قيم س فيما عدا عند س = أ

وكانت : نهــــا ق (س) لها وجود
س ← أ

فإن : نهــــا ق (س) = نهــــا د (س)
س ← أ س ← أ

تستخدم هذه النظرية لإيجاد نهاية دالة كسرية جبرية وفيها نختصر العامل الصفرى

(س – أ) فى كل من البسط والمقام ويسمى عن طريق عدة طرق :

منها (!) التحليل ، (!!) القسمة المطولة ، (!!!) الضرب فى المرافق ....

مراجعة على التحليل : يراعى أولا إخراج العامل المشترك الأعلى

الفرق بين مربعين : س^{٢} – ٩ = (س – ٣) (س + ٣)

الفرق بين مكعبين : س^{٣} – ٨ = (س – ٢) (س^{٢} + ٢ س + ٤)

مجموع مكعبين : س^{٣} + ٢٧ = (س + ٣) (س^{٢} – ٣ س + ٩)

المقدار الثلاثى : إذا كان معامل س^{٢} = ١

س^{٢} + ٥ س + ٦ = (س + ٣)(س + ٢)

س^{٢} – ٥ س + ٦ = (س – ٣)(س – ٢)

س^{٢} + ٥ س – ٦ = (س – ١)(س + ٦)

س^{٢} – ٥ س – ٦ = (س – ٦)(س + ١)

س^{٢} – ٦ س – ١٦ = (س – ٨)(س + ٢)

إذا كان معامل س^{٢} $\neq$ ١

٣ س^{٢} + ١١ س + ٦ = (س + ٣)(٣ س + ٢)

٣ س^{٢} – ١٩ س + ٦ = (٣ س – ١)(س – ٦)

٣ س^{٢} + ٧ س – ٦ = (س + ٣)(٣ س – ٢)

٣ س^{٢} – ١٧ س – ٦ = (س – ٦)(٣ س + ١)

المقدار الثلاثى المربع الكامل :

س^{٢} + ٦ س + ٩ = (س + ٣)^{٢}

٢٥ س^{٢} – ٤٠ س + ١٦ = (٥ س – ٤)^{٢}

أمثلة : أوجد كلاً مما يلى :

مثــال١ : $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـــا}} \dfrac{٣\text{س} + ٤}{\text{س} + ٥}$

الحــــــل

بالتعويض نجد أن : $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـــا}} \dfrac{٣\text{س} + ٤}{\text{س} + ٥} = \dfrac{٣ \times ١ + ٤}{١ + ٥} = \dfrac{٧}{٦}$

مثــال٢ : $\underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نهـــا}} \dfrac{٣\text{س} + ٤}{\text{س} + ١}$

الحــــــل

بالتعويض نجد أن :

$\underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نهـــا}} \dfrac{٣\text{س} + ٤}{\text{س} + ١} = \dfrac{٣ \times (-١) + ٤}{-١ + ١} = \dfrac{١}{٠}$ كمية غير معرفة

∴ الدالة ليس لها نهاية أو النهاية ليس لها وجود

إستخدام التحليل لإيجاد نهاية دالة عند نقطة :

مثــال٣ : $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{س}^٢ - ٩}{\text{س} - ٣}$

الحــــــل

بالتعويض عن : س = ٣ نجد أن : د (٣) = $\dfrac{(٣)^٢ - ٩}{٣ - ٣} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ غير معينة

∴ $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{س}^٢ - ٩}{\text{س} - ٣} = \dfrac{(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٣)}{(\text{س} - ٣)}$

$= (\text{س} + ٣) = ٦$

مثــال٤ : $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٦}{\text{س} - ٢}$

الحــــــل

بالتعويض عن س = ٢ نجد أن : د (٢) = $\dfrac{(٢)^٢ - ٥ \times ٢ + ٦}{٢ - ٢} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ غير معينة

∴ $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٦}{\text{س} - ٢} = \underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \dfrac{(\text{س} - ٢)(\text{س} - ٣)}{(\text{س} - ٢)}$

$= (\text{س} - ٣) = -١$

مثـــال ٥ : $\lim\limits_{س \to -٣} \frac{س^٢ + ٣ س}{س^٢ + س - ٦}$

الحـــــــل

بالتعويض عن س = ـ ٣ نجد أن : د (ـ ٣) = $\frac{٩ + ٣ \times ٣}{٩ - ٣ - ٦} = \frac{صفر}{صفر}$ غير معينة

∴ $\lim\limits_{س \to -٣} \frac{س^٢ + ٣ س}{س^٢ + س - ٦} = \lim\limits_{س \to -٣} \frac{س (س + ٣)}{(س - ٢) (س + ٣)}$

$= \lim\limits_{س \to -٣} \frac{س}{(س - ٢)} = \frac{-٣}{-٣ - ٢} = \frac{٣}{٥}$

إستخدام القسمة المطولة لإيجاد نهاية دالة عند تقطة :

مثـــال ٦ : $\lim\limits_{س \to ٣} \frac{س^٣ - ٤ س^٢ + س + ٦}{س^٢ - ٤س + ٣}$

الحـــــــل

بالتعويض عن س = ٣ نجد أن : د (٣) = $\frac{٣^٣ - ٤ \times ٣^٢ + ٣ + ٦}{٣^٢ - ٤ \times ٣ + ٣} = \frac{صفر}{صفر}$

∴ (س - ٣) عامل مشترك بين البسط والمقام (العامل الصفرى)

بإجراء قسمة مطولة للبسط على (س - ٣) " لصعوبة تحليل البسط "

∵ $س^٣ - ٤ س^٢ + س + ٦ \div (س - ٣)$ ، وخارج القسمة $س^٢ - س - ٢$

$\pm س^٣ \mp ٣ س^٢$

$- س^٢ + س + ٦$

$\mp س^٢ \pm ٣ س$

$- ٢ س + ٦$

$\mp ٢ س \pm ٦$

....

∴ $\lim\limits_{س \to ٣} \frac{(س - ٣) (س^٢ - س - ٢)}{(س - ٣) (س - ١)} = \frac{٩ - ٣ - ٢}{٣ - ١} = ٢$

مثـــال ٧ : $\lim\limits_{س \to ١} \frac{س^٣ - ٢س + ١}{س^٢ + ٣س - ٤}$

الحـــــــل

بالتعويض عن س = ١ نجد أن : د (١) = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

∴ (س – ١) عامل مشترك بين البسط والمقام (العامل الصفرى)

يمكن استخدام طريقة مبسطة لإجراء القسمة بطريقة (القسمة التركيبية)

(١) نكتب معاملات المقسوم مرتبة تنازلياً وتساوى المقسوم علية بالصفر للحصول على قيمة س كما بالشكل

(٢) أترك أول معامل ثم أضرب المعامل الأول فى قيمة س وأكتب الناتج أسفل المعامل الثانى وأجمع

(٣) كرر عمليتى الضرب والجمع

نجد أن معاملات خارج القسمة هى: ١ ، ـ١ ، ـ١

على الترتيب فإن خارج القسمة هو س٢ ـ س ـ ١

١	ـ ٢	٠	+١	١
	١	ـ ١	ـ ١	
١	ـ ١	ـ ١	٠	

خارج القسمة

$س^2 - س - ١$

∴ $\lim\limits_{س \to ١} \frac{(س - ١)(س^2 - س - ١)}{(س - ١)(س + ٤)} = \frac{١ - ١ - ١}{١ + ٤} = \frac{١}{٥}$

مثـــال ٨ : $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^3 - ٧ س + ٦}{٣س^2 - ٨ س + ٤}$

الحـــــــــــــل

بالتعويض عن س = ١ نجد أن : د (١) = $\frac{١^3 + ١ - ٢}{١^2 + ٣ \times ١ - ٤}$ = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ غير معينة

∴ (س – ١) عامل مشترك بين البسط والمقام (العامل الصفرى)

يمكن استخدام طريقة مبسطة لإجراء القسمة بطريقة (القسمة التركيبية)

١	+ ٠	ـ ٧	ـ ٦	٢
١	+ ٢	ـ ٧	ـ٦	
	٢	٤	ـ ٦	
١	+ ٢	ـ ٣	٠	

خارج القسمة

$س^2 + ٢ س - ٣$

∴ $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(س^2 + ٢س - ٣)}{(س - ٢)(٣س - ٢)}$

$= \lim\limits_{س \to ٢} \frac{(س^2 + ٢س - ٣)}{(٣س - ٢)}$

$= \frac{(٤ + ٤ - ٣)}{(٦ - ٢)} = \frac{٥}{٤}$

الضرب فى المرافق :

إذا وجد فرق بين جذرين تربيعيين لمقدارين جبريين (فى البسط أو المقام أو كليهما)

نضرب كلاً من البسط والمقام فى مرافق (فى البسط أو المقام أو كليهما)

مثـــال٩ : $\lim_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\text{س}^{٢} + ٢\,\text{س}}{\sqrt{\text{س} + ٩} - ٣}$

الحـــــــــــــل

بالتعويض عن س = ٠ نجد أن : د (٠) = $\dfrac{(٠)^{٢} + ٢ \times ٠}{\sqrt{٠ + ٩} - ٣} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ غير معينة

بالضرب بسطاً ومقاماً × مرافق المقام : $\sqrt{\text{س} + ٩} + ٣$ نجد أن :

$$\lim_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\text{س}\,(\text{س} + ٢)(\sqrt{\text{س} + ٩} + ٣)}{(\text{س} + ٩) - ٩}$$

$$= (٠ + ٢)(\sqrt{٠ + ٩} + ٣) = ١٢$$

مثـــال١٠ : $\lim_{\text{س} \to ٣} \dfrac{\text{س} - ٣}{\sqrt{\text{س} + ١} - ٢}$

الحـــــــــــــل

بالتعويض عن س = ٣ نجد أن : د (٣) = $\dfrac{٣ - ٣}{\sqrt{٣ + ١} - ٢} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ كمية غير معينة

بالضرب بسطاً ومقاماً × مرافق المقام : $\sqrt{\text{س} + ١} + ٢$ نجد أن :

$$\lim_{\text{س} \to ٠} \dfrac{(\text{س} - ٣)(\sqrt{\text{س} + ١} + ٢)}{(\text{س} + ١) - ٤} = (\sqrt{٣ + ١} + ٢) = ٤$$

مثـــال١١ : $\lim_{\text{س} \to ٢} \left(\dfrac{\text{س}^{٢} - \text{س}}{\text{س} - ٢} - \dfrac{٢}{\text{س} - ٢} \right)$

الحـــــــــــــل

بتوحيد المقامات نجد أن :

$$\lim_{\text{س} \to ٢} \dfrac{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢}{\text{س} - ٢}$$

بالتعويض عن س = ٢ نجد أن : د (٢) = $\frac{٢^٢ - ٢ - ٢}{٢ - ٢}$ = $\frac{صفر}{صفر}$

∴ $\lim_{س \leftarrow ٢}$ $\frac{(س - ٢)(س + ١)}{س - ٢}$ = ٢ + ١ = ٣

تمـــــــــــــارين

أكمـــــــل ما يأتى

(١) $\lim_{س \leftarrow ٢}$ (٣س - ١) =...... (٢) $\lim_{س \leftarrow -٢}$ $\frac{س^٣ - ٢٧}{س - ٣}$ =........

(٣) $\lim_{س \leftarrow -٢}$ $\frac{س^٢ - ٤}{س + ٢}$ =..........

(٤) $\lim_{س \leftarrow \frac{\pi}{٢}}$ (٢س - جا س) = ...

(٥) إذا كان : $\lim_{س \leftarrow ٢}$ $\frac{أ}{س + ١}$ = ٤ فإن : أ = ...

إختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه

(١) $\lim_{س \leftarrow ٤}$ (٣س - $\sqrt{س}$) (أ) ٨ (ب) ١٠ (جـ) ١٤ (د) ١٦

(٢) $\lim_{س \leftarrow -٢}$ $\frac{٣س^٢ - ١٢}{س + ٢}$ (أ) ١٨ (ب) -٣ (جـ) ١٢ (د) -١٢

(٣) $\lim_{س \leftarrow ٣}$ $\frac{س^٢ - س - ٦}{س^٢ + س - ١٢}$ (أ) $\frac{٥}{٧}$ (ب) $\frac{١}{٧}$ (جـ) -١ (د) -٥

(٤) $\lim_{س \leftarrow ٠}$ $\frac{\sqrt{س + ١} - ١}{س}$ (أ) ٠ (ب) $\sqrt{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) غير معرفة

(٥) ∴ $\lim_{س \leftarrow \frac{\pi}{٢}}$ $\frac{جا س}{س}$ (أ) ١ (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (جـ) $\frac{٢}{\pi}$ (د) غير معرفة

أوجد كلاً مما يأتى :

١	$\lim\limits_{س \to ٣} \frac{س^٢ + س + ٦}{س + ٣}$	٢	$\lim\limits_{س \to ٣} \frac{س^٢ + ٩}{س + ٣}$
٣	$\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^٢ + س - ٦}{س - ٢}$	٤	$\lim\limits_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣}$
٥	$\lim\limits_{س \to -٣} \frac{س^٢ + ٥س + ٦}{س + ٣}$	٦	$\lim\limits_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٥س + ٦}{س - ٣}$
٧	$\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^٣ - ٨}{س^٢ - ٤}$	٨	$\lim\limits_{س \to -٣} \frac{س^٣ - ٢٧}{س^٢ - ٩}$
٩	$\lim\limits_{س \to ١} \frac{س^٢ - ١}{٢س - ٢}$	١٠	$\lim\limits_{س \to ٢} \frac{٣س^٢ - ١٢}{س^٣ - ٨}$
١١	$\lim\limits_{س \to ٥} \frac{٢س - ١٠}{س^٢ - ٥س}$	١٢	$\lim\limits_{س \to ١} \frac{س^٢ + ٣س - ٤}{س^٢ - س}$
١٣	$\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^٢ - ٥س + ٦}{س^٢ + ٢س - ٨}$	١٤	$\lim\limits_{س \to -٣} \frac{س^٣ - ٢٧}{س^٢ + ٩س + ١٨}$
١٥	$\lim\limits_{س \to -١} \frac{س^٢ - ٥س - ٦}{س^٢ - ١}$	١٦	$\lim\limits_{س \to ٤} \frac{س^٢ - ٧س + ١٢}{س - ٤}$
١٧	$\lim\limits_{س \to ٣} \frac{٢س^٢ - ٧س + ٣}{س - ٣}$	١٨	$\lim\limits_{س \to -١} \frac{٣س^٢ - س - ٤}{س^٢ + ٣س + ٢}$

١٩	$\underset{س \to ٢}{\text{نهـــا}} \frac{٢س^{٢} + ٣ س - ١٤}{٣س^{٢} - ٤ س - ٤}$	٢٠	$\underset{س \to -١}{\text{نهـــا}} \frac{٢ س^{٢} + ٧ س + ٥}{٣س^{٢} + ٤ س + ١}$
٢١	$\underset{س \to ٤}{\text{نهـــا}} \frac{٢ س^{٢} - ٧ س - ٤}{س^{٢} - ٧ س + ١٢}$	٢٢	$\underset{س \to ٣}{\text{نهـــا}} \frac{٢س^{٢} - ٥ س - ٣}{س - ٣}$
٢٣	$\underset{س \to ٣}{\text{نهـــا}} \left(\frac{س^{٢} + س - ١٢}{س^{٢} - ٩}\right)^{٢}$	٢٤	$\underset{س \to \frac{٢}{٣}}{\text{نهـــا}} \left(\frac{٩ س^{٢} - ٤}{٣س - ٢}\right)^{٢}$
٢٥	$\underset{س \to ٢}{\text{نهـــا}} \frac{س^{٣} - س - ٦}{س^{٢} - ٤}$	٢٦	$\underset{س \to ١}{\text{نهـــا}} \frac{س^{٣} - ٢ س^{٢} + ١}{س^{٣} - ١}$
٢٧	$\underset{س \to ٢}{\text{نهـــا}} \frac{س^{٣} - س^{٢} - ٨ س + ١٢}{س^{٢} - ٣ س + ٢}$	٢٨	$\underset{س \to ٢}{\text{نهـــا}} \frac{س^{٣} - س^{٢} - ٤ س - ٤}{س^{٢} + س - ٦}$

٢٩	$\underset{س \to ٢}{\text{نهـــا}} \frac{س^{٣} + س - ١٠}{س^{٢} - ٤ س + ٤}$	٣٠	$\underset{س \to ١}{\text{نهـــا}} \frac{س^{٣} + ٤ س^{٢} - س - ٤}{س^{٤} - ١}$
٣١	$\underset{س \to ٥}{\text{نهـــا}} \frac{س - ٥}{\sqrt{س - ٤} - ١}$	٣٢	$\underset{س \to -١}{\text{نهـــا}} \frac{\sqrt{س + ١٧} - ٤}{س + ١}$
٣٣	$\underset{س \to ٠}{\text{نهـــا}} \frac{س^{٢} + ٢ س}{\sqrt{س + ٢٥} - ٥}$	٣٤	$\underset{س \to ٠}{\text{نهـــا}} \frac{\sqrt{١ + س} - \sqrt{١ - س}}{٢ س}$
٣٥	$\underset{س \to -١}{\text{نهـــا}} \frac{\sqrt{س^{٢} - س + ٢} - ٢}{\sqrt[٣]{س^{٣} + ١}}$	٣٦	$\underset{س \to ٣}{\text{نهـــا}} \frac{\sqrt{س + ١} - ٢}{\sqrt{٧ - س} - ٢}$

نظرية ٤ : نهاية دالة (بالقانون)

$$\lim_{س \to أ} \frac{س^ن - أ^ن}{س - أ} = ن \times أ^{ن-١}$$ لكل: ن ∈ ح − { ٠ }

نتيجة:

$$\lim_{س \to أ} \frac{س^ن - أ^ن}{س^م - أ^م} = \frac{ن}{م} \times أ^{ن-م}$$ لكل: ن ، م ∈ ح − { ٠ }

مثال ١ : $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٥ + ٣٢}{س + ٢} = \frac{٣٢ + ٣٢}{٢ + ٢} = ١٦$ " معرفة "

مثال ٢ : $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٤ + ٨١}{س - ٣} = \frac{٨١ + ٨١}{٣ - ٣} = \frac{١٦٢}{صفر}$ كمية غير معرفة

مثال ٣ : $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٧ - ١٢٨}{س - ٢}$

الحل

بالتعويض نجد أن : د (٢) = $\frac{١٢٨ - ١٢٨}{٢ - ٢} = \frac{صفر}{صفر}$ كمية غير معينة

∴ المقدار = $\lim \frac{س^٧ - ٢^٧}{س - ٢} = ٧ \times ٢^{٧-١} = ٧ \times ٢^٦ = ٤٤٨$

(المطبوع: $٣٢٠ = ٢^٦ \times ٥ =$)

مثال ٤ : $\lim_{س \to -٤} \frac{س^٣ + ٦٤}{س + ٤}$

الحل

بالتعويض نجد أن : د (−٤) = $\frac{-٦٤ + ٦٤}{-٤ + ٤} = \frac{صفر}{صفر}$ كمية غير معينة

∴ المقدار = $\lim_{س \to -٤} \frac{س^٣ - (-٤)^٣}{س - (-٤)}$

$= ٣ \times (-٤)^{٣-١} = ٣ \times (-٤)^٢ = ٤٨$

مثـ٥ـال : نهـا

$$\lim_{س \to \sqrt{٥}} \frac{س^{٧} - ١٢٥\sqrt{٥}}{س - \sqrt{٥}}$$

الحـــل

بالتعويض نجد أن : د $(\sqrt{٥}) = \frac{(\sqrt{٥})^{٧} - ١٢٥\sqrt{٥}}{\sqrt{٥} - \sqrt{٥}} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ كمية فير معينة

∴ المقدار = $\lim_{س \to \sqrt{٥}} \frac{س^{٧} - (\sqrt{٥})^{٧}}{س - (\sqrt{٥})} = ٧ \times (\sqrt{٥})^{٦} = ٧ \times ٥^{٣} = ٨٧٥$

مثـ٦ـال : نهـا

$$\lim_{س \to -\frac{٣}{٢}} \frac{٣٢\,س^{٥} + ٢٤٣}{٤\,س - ٩}$$

الحـــل

بالتعويض نجد أن : د $(-\frac{٣}{٢}) = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ كمية غير معينة

عندما : س ← $-\frac{٣}{٢}$ فإن : ٢ س ← −٣

∴ المقدار = $\lim_{٢س \to -٣} \frac{(٢\,س)^{٥} - (-٣)^{٥}}{(٢\,س)^{٢} - (-٣)^{٢}} = \frac{٥}{٢} \times (-٣)^{٣} = \frac{-١٣٥}{٢}$

مثـ٧ـال : نهـا

$$\lim_{س \to ٠} \frac{(س + ٥)^{٤} - ٦٢٥}{س}$$

الحـــل

بالتعويض نجد أن : د (٠) = $\frac{(٠ + ٥)^{٤} - ٦٢٥}{٠} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ كمية غير معينة

بإضافة : (+٥ ، − ٥) للمقام

، وعندما : س ← ٠ فإن : (س + ٥) ← ٥

∴ المقدار = $\lim_{س \to ٠} \frac{(س + ٥)^{٤} - (٥)^{٤}}{(س + ٥) - ٥}$

$= \lim_{س+٥ \to ٥} \frac{(س + ٥)^{٤} - (٥)^{٤}}{(س + ٥) - ٥} = ٤ \times ٥^{٣} = ٥٠٠$

مثـال٨ : $\dfrac{(\text{س} - ٥)^{٧} - ١}{\text{س} - ٦} \underset{\text{س} \leftarrow ٦}{\text{نهــا}}$

الحـــل

بالتعويض نجد أن : د (٦) = $\dfrac{(٦ - ٥)^{٧} - ١}{٦ - ٦} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ كمية غير معينة

بوضع: (− ٦) = (− ٥ − ١) بالمقام ، وعندما : س ← ٦ فإن : (س − ٥) ← ١

∴ المقدار = $\dfrac{(\text{س} - ٥)^{٧} - (١)^{٧}}{(\text{س} - ٥) - ١} \underset{\text{س} \leftarrow ٦}{\text{نهــا}}$

= $\dfrac{(\text{س} - ٥)^{٧} - (١)^{٧}}{(\text{س} - ٥) - ١} \underset{\text{س} - ٥ \leftarrow ١}{\text{نهــا}} = ٧ \times ١^{٦} = ٧$

مثـال٩ : $\dfrac{(\text{س} + ٥\text{و})^{٩} - \text{س}^{٩}}{٣\text{و}} \underset{\text{و} \leftarrow ٠}{\text{نهــا}}$

الحـــل

بالتعويض نجد أن : د (٠) = $\dfrac{(\text{س} + ٥ \times ٠)^{٩} - \text{س}^{٩}}{٣ \times ٠} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ كمية غبر معينة

بالضرب بسطاً ومقاماً × $\frac{٥}{٣}$ ، إضافة (+ س ، − س) بالمقام

، وعندما : و ← ٠ ⟸ ٥ و ← ٠ ∴ (س + ٥ و) ← س

∴ المقدار = $\dfrac{\frac{٥}{٣}\left((\text{س} + ٥\text{و})^{٩} - (\text{س})^{٩}\right)}{\frac{٥}{٣}(٣\text{و}) + \text{س} - \text{س}} \underset{\text{و} \leftarrow ٠}{\text{نهــا}}$

= $\dfrac{(\text{س} + ٥\text{و})^{٩} - (\text{س})^{٩}}{(\text{س} + ٥\text{و}) - \text{س}} \underset{\text{س} + ٥\text{و} \leftarrow \text{س}}{\text{نهــا}} \frac{٥}{٣} = \frac{٥}{٣} \times ٩ \times \text{س}^{٦} = ١٥\ \text{س}^{٦}$

تمــــــــــــارين

أكمــــــــل ما يأتى

(١) $\underset{\text{س} \to 1}{\text{نهـــا}} \frac{\text{س}^9 - 1}{\text{س}^5 - 1}$ = ...

(٢) $\underset{\text{س} \to -2}{\text{نهـــا}} \frac{\text{س}^3 - 27}{\text{س}^2 - 9}$ = ...

(٣) $\underset{\text{س} \to -2}{\text{نهـــا}} \frac{\text{س}^4 - 16}{\text{س}^3 + 8}$ = ...

(٤) $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نهـــا}} \frac{(\text{س} + 1)^9 - 1}{\text{س}}$ = ...

(٥) إذا كان : $\underset{\text{س} \to \text{ك}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{س}^5 - \text{ك}^5}{\text{س} - \text{ك}} = 80$ فإن : ك = ...

إختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه

(٢) $\underset{\text{س} \to 2}{\text{نهـــا}} \frac{\text{س}^5 - 32}{\text{س} - 2}$ (أ) ١٦ (ب) ٥×١٦ (ج) ٦٤ (د) ٣٢

(٣) $\underset{\text{س} \to -1}{\text{نهـــا}} \frac{\text{س}^5 + 1}{\text{س} + 1}$ (أ) ٥ (ب) ٤ (ج) ـ٥ (د) ـ٤

(٤) $\underset{\text{هـ} \to 0}{\text{نهـــا}} \frac{(\text{س} + \text{هـ})^7 - \text{س}^7}{\text{هـ}}$ (أ) س^7 (ب) 7س^6 (ج) صفر (د) ١

(٥) $\underset{\text{س} \to 1}{\text{نهـــا}} \frac{\text{س}^{13} - 1}{\text{س}^{19} - 1}$ (أ) $\frac{13}{19}$ (ب) $\frac{19}{13}$ (ج) ـ٦ (د) $\frac{13}{19} - 1$

أوجد كلاً مما يأتى :

١	$\underset{\text{س} \to 3}{\text{نهـــا}} \frac{\text{س}^5 - 243}{\text{س} - 3}$	٢	$\underset{\text{س} \to 2}{\text{نهـــا}} \frac{\text{س}^6 - 64}{\text{س} - 2}$
٣	$\underset{\text{س} \to -2}{\text{نهـــا}} \frac{\text{س}^5 + 32}{\text{س} + 2}$	٤	$\underset{\text{س} \to -\sqrt{3}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{س}^7 - 27\sqrt{3}}{\text{س} + \sqrt{3}}$

٥	$\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٤} - ١٦}{٢س - ٤}$	٦	$\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{٣ س^{٦} - ٣}{س - ١}$
٧	$\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{س^{٥} - ٨١ س}{س - ٣}$	٨	$\underset{س \to -٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٤} - ١٦}{س^{٢} + ٢ س}$
٩	$\underset{س \to -٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٧} + ١٢٨}{س^{٣} + ٨}$	١٠	$\underset{س \to -٣}{\text{نهـا}} \frac{س^{٤} - ٨١}{س^{٣} + ٢٧}$
١١	$\underset{س \to \sqrt{٢}}{\text{نهـا}} \frac{س^{٥} - ٤\sqrt{٢}}{س^{٢} - ٢}$	١٢	$\underset{س \to -\sqrt{٥}}{\text{نهـا}} \frac{س^{٥} - ٢٥\sqrt{٥}}{س^{٢} - ٥}$
١٣	$\underset{س \to \frac{٣}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{٣٢ س^{٥} - ٢٤٣}{٨ س^{٣} - ٢٧}$	١٤	$\underset{س \to -\frac{٥}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{١٦ س^{٤} - ٦٢٥}{٨س^{٣} + ١٢٥}$
١٥	$\underset{٢س \to -١}{\text{نهـا}} \frac{١٦ س^{٤} - ١}{١٢٨ س^{٧} + ١}$	١٦	$\underset{٢س \to \sqrt{٣}}{\text{نهـا}} \frac{٨ س^{٣} - ٣\sqrt{٣}}{٢ س - \sqrt{٣}}$
١٧	$\underset{س \to \frac{١}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{س^{٥} - ١٢٨ س^{١٢}}{س^{٢} - ١٦ س^{٦}}$	١٨	$\underset{س \to \frac{١}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{١٦ س^{٤} - ١}{٢س - ١}$
١٩	$\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(س + ٢)^{٤} - ١٦}{س}$	٢٠	$\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(س + ٣)^{٤} - ٨١}{س}$
٢١	$\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(س - ١)^{٥} + ١}{س}$	٢٢	$\underset{س \to -٣}{\text{نهـا}} \frac{(س + ٢)^{٥} + ١}{س + ٣}$
٢٣	$\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(س + ١)^{٥} - ١}{س^{٢} + س}$	٢٤	$\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{(س - ٢)^{٦} - ١٦}{س^{٢} - ٣ س}$

رقم	المسألة	رقم	المسألة
٢٥	$\lim_{\text{س} \to 4} \frac{(\text{س} - 3)^6 - 1}{\text{س} - 4}$	٢٦	$\lim_{\text{س} \to -3} \frac{(\text{س} + 2)^5 + 1}{\text{س} + 3}$
٢٧	$\lim_{\text{س} \to -1} \frac{(\text{س} + 2)^6 - 1}{(\text{س} + 2)^3 - 1}$	٢٨	$\lim_{\text{س} \to 0} \frac{(1 + 3\text{س})^7 - 1}{4\text{س}}$
٢٩	$\lim_{\text{س} \to 0} \frac{(2\text{س} + 1)^5 - 1}{5\text{س}}$	٣٠	$\lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{(\text{س} + 5\text{هـ})^9 - \text{س}^9}{6\text{هـ}}$
٣١	$\lim_{\text{و} \to 0} \frac{(\text{س} + 4\text{و})^6 - \text{س}^6}{\text{و}}$	٣٢	$\lim_{\text{و} \to 0} \frac{(\text{س} + 3\text{و})^8 - \text{س}^8}{4\text{و}}$
٣٣	$\lim_{\text{س} \to 2} \frac{(\text{س} - 3)^6 - 1}{\text{س} - 2}$	٣٤	$\lim_{\text{س} \to 2} \frac{(\text{س}^2 - 3)^{[illegible]} - 1}{\text{س} - 2}$
٣٥	$\lim_{\text{س} \to -3} \frac{(\text{س} + 1)^3 + 8}{\text{س}^2 - \text{س} - 12}$	٣٦	$\lim_{\text{س} \to 2} \frac{\text{س}^7 + \text{س}^5 - 160}{\text{س} - 2}$
٣٧	$\lim_{\text{س} \to 3} \frac{(\text{س} - 2)^5 + \text{س} - 4}{3\text{س} - 9}$	٣٨	$\lim_{\text{س} \to 2} \frac{16\text{س}^{-4} - 1}{\text{س} - 2}$
٣٩	$\lim_{\text{س} \to 1} \frac{\sqrt[7]{\text{س}} - 1}{\sqrt[4]{\text{س}} - 1}$	٤٠	$\lim_{\text{س} \to 4} \frac{\text{س}^3 \sqrt{\text{س}} - 128}{\text{س} - 4}$
٤١	$\lim_{\text{س} \to 2} \frac{\sqrt[3]{\text{س} + 6} - 2}{\text{س} - 2}$	٤٢	$\lim_{\text{س} \to 1} \frac{\sqrt[3]{\text{س} + 26} - 3}{\text{س} - 1}$
٤٣	$\lim_{\text{س} \to 4} \frac{\text{س} - 4}{\sqrt{\text{س}} - 2}$	٤٤	$\lim_{\text{س} \to 9} \frac{\text{س} - \sqrt{3}}{\text{س} - 9}$

٤٥) $\lim_{س \to ١} \left(\frac{س - ١}{\sqrt{س + ٣} - ٢} \times \frac{س^{٦} - ١}{س^{٣} - ١} \right)$

٤٦) $\lim_{س \to -١} \left(\frac{س + ١}{\sqrt{٣ - س} - ٢} - \frac{س^{١٠} - س}{س^{١٣} - س} \right)$

٤٧) $\lim_{س \to ٢} \left(\frac{١}{س^{٤} - ١٦} \times \frac{(س^{٥} - ٣٢)^{٣}}{(س - ٢)^{٢}} \right)$

٤٨) $\lim_{س \to ٤} \frac{س \sqrt{س - ٣} - ٤}{س - ٤}$

٤٩) إذا كانت : $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٢} + (م - ١) س - م}{س - ١} = ٤$ أوجد قيمة : م

نهاية الدالة عند اللانهاية

إذا كانت د (س) تقترب من قيمة حقيقية معينة (ل مثلاً) عندما تقترب س من اللانهاية فإننا نقول أن الدالة لها نهاية

ونعبر عن ذلك رمزياً بالصورة نهـــا د (س) = ل
س ← ∞

نظرية (١) : نهـــا $\frac{١}{س}$ = صفر
س ← ∞

نتيجة (١) : نهـــا $\frac{أ}{س}$ = صفر حيث : أ ∈ ح - { ٠ }
س ← ∞

نتيجة (٢) : نهـــا $\frac{أ}{س^{ن}}$ = صفر حيث : أ ∈ ح - { ٠ } ، ن ∈ $ح^{+}$
س ← ∞

تستخدم النظرية ونتائجها فى إيجاد نهـــا د (س) حينما
س ← ∞

(١) تكون الدالة د على شكل كسر جبرى

(٢) كان التعويض المباشر يعطى $\frac{\infty}{\infty}$ أ، ∞ ــ ∞

وذلك بأن نقسم كلاً من البسط والمقام على (س) مرفوعاً لأعلى قوة أس فى مقام الكسر

، أما إذا أعطى (∞ – ∞) فنضرب فى المرافق أولاً

ثم نقسم كلاً من البسط والمقام على المتغير (س) مرفوعاً لأعلى قوة (أس) فى المقام

أمثلة : أوجد كلاً مما يلى :

مثـال١ : $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{٥\text{س}^{٢} - ٣\text{س}}{\text{س}^{٢} - ٢}$

الحـــل

بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}^{٢}$

$\therefore$ المقدار $= \lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{٥ - \frac{٣}{\text{س}}}{١ - \frac{٢}{\text{س}^{٢}}} = \dfrac{٥ - ٠}{١ - ٠} = ٥$

مثـال٢ : $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{٥\text{س}^{٣} - ٣\text{س} + ٦}{٣\text{س} - ٧\text{س}^{٣}}$

الحـــل

بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}^{٣}$

$\therefore$ المقدار $= \lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{٥ - \frac{٣}{\text{س}^{٢}} + \frac{٦}{\text{س}^{٣}}}{\frac{٣}{\text{س}^{٢}} - ٧} = \dfrac{٥ - ٠ + ٠}{٠ - ٧} = -\dfrac{٥}{٧}$

مثـال٣ : $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{٣\text{س}^{٢} + ٦}{٢\text{س} - ٧\text{س}^{٣}}$

الحـــل

بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}^{٣}$

$\therefore$ المقدار $= \lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{\frac{٣}{\text{س}} + \frac{٦}{\text{س}^{٣}}}{\frac{٢}{\text{س}^{٢}} - ٧} = \dfrac{٠ + ٠}{٠ - ٧} =$ صفر

مثـــال ٤ : $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{9\text{س}^3 - 2\text{س} + 5}{2\text{س} - \text{س}^2}$

الحـــــــــــل

بقسمة كل من البسط والمقام على س^2

$\therefore$ المقدار $= \lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{9\text{س} - \frac{2}{\text{س}} + \frac{5}{\text{س}^2}}{\frac{2}{\text{س}} - 1} = \dfrac{9 \times \infty - 0 + 0}{0 - 1} = \dfrac{\infty}{1}$

$\therefore$ ليس للدالة نهاية (اكبر أس فى المقام)

مثـــال ٥ : $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{(\text{س} - 2)(3\text{س}^2 + 1)}{(4\text{س} + 3)(5\text{س}^2 - 1)}$

الحـــــــــــل

بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}^3 = \text{س} \times \text{س}^2 = \text{س}^2 \times \text{س}$

$\therefore$ المقدار $= \lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{(1 - \frac{2}{\text{س}})(3 + \frac{1}{\text{س}^2})}{(4 + \frac{3}{\text{س}})(5 - \frac{1}{\text{س}^2})} = \dfrac{(1 - 0)(3 + 0)}{(4 + 0)(5 - 0)} = \dfrac{3}{20}$

مثـــال ٦ : $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{\sqrt[3]{8\text{س}^3 + 1}}{\sqrt{9\text{س}^2 - 5}}$

الحـــــــــــل

بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س} = \sqrt{\text{س}^2} = \sqrt[3]{\text{س}^3}$

$\therefore$ المقدار $= \lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{\sqrt[3]{8 + \text{س}^{-3}}}{\sqrt{9 - 5\text{س}^{-2}}} = \dfrac{\sqrt[3]{8 + 0}}{\sqrt{9 - 0}} = \dfrac{2}{3}$

مثـال ٧ : نهـا $\lim_{\text{س} \to \infty} \left(\sqrt{\text{س}^{2} + \text{س}} - \sqrt{\text{س}^{2} - 1} \right)$

الحـــــل

∴ د (∞) = ∞ ــ ∞ = كمية غير معنة

بالضرب بسطاً ومقاماً × المرافق نجد :

$$\because \text{د(س)} = \left(\sqrt{\text{س}^{2} + \text{س}} - \sqrt{\text{س}^{2} - 1} \right) \times \frac{\left(\sqrt{\text{س}^{2} + \text{س}} + \sqrt{\text{س}^{2} - 1} \right)}{\left(\sqrt{\text{س}^{2} + \text{س}} + \sqrt{\text{س}^{2} - 1} \right)}$$

$$\therefore \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{س}^{2} + \text{س} - \left(\text{س}^{2} + 1 \right)}{\left(\sqrt{\text{س}^{2} + \text{س}} + \sqrt{\text{س}^{2} - 1} \right)}$$

$$= \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\left(\text{س} - 1 \right)}{\left(\sqrt{\text{س}^{2} + \text{س}} + \sqrt{\text{س}^{2} - 1} \right)}$$

بقسمة كل من البسط والمقام على س $= \sqrt{\text{س}^{2}}$

$$\therefore \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{1 - \text{س}^{-1}}{\sqrt{1 - \text{س}^{-1}} + \sqrt{1 + \text{س}^{-2}}} = \frac{1 - 0}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

تمـــــــارين

أكمـــــــل ما يأتى

(١) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{٣}{\text{س}}$ = ...

(٢) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س} - ٥}}$ = ...

(٣) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{س}^{٥} + ٥\,\text{س}^{٢}}{٣\,\text{س}^{٥} + \text{س}^{٢} + ٨}$ = ...

(٤) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \left(\frac{٧}{\text{س}} + ٣ \right)$ = ...

(٥) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \left(٣\,\text{س}^{-٢} + ٧\,\text{س}^{-١} - ٥ \right)$ = ...

إختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه

(١) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س} - ٢}$

أ) ٤ ب) ٢ جـ) ٠ د) ∞

(٢) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{\sqrt{\text{س}} + ٣}{\sqrt{\text{س}} + ٢}$

أ) ٣ ب) ١ جـ) ٠ د) $\frac{٣}{٢}$

(٣) $\lim\limits_{\text{هـ} \to \infty} \frac{(\text{س} + ١)(٢\text{س} + ٣)}{٣\text{س}^{٢} + ٧\text{س}}$

أ) $\frac{٣}{٢}$ ب) $\frac{٢}{٣}$ جـ) صفر د) $\frac{٢}{٧}$

(٤) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{\sqrt[٣]{٨\text{س}^{٣} - ٧}}{\sqrt{٩\text{س}^{٢} + ٣}}$

أ) $\frac{٨}{٩}$ ب) $\frac{-٧}{٣}$ جـ) $\frac{١}{١٢}$ د) $\frac{٢}{٣}$

أوجد كلاً مما يأتى :

١	$\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \frac{٤ س^{٢} - ٣}{٥ س^{٢} - ١}$	٢	$\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \frac{٣ س^{٢} + ٤}{٢ - س^{٢}}$
٣	$\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \frac{٥ س^{٢} - ٣ س + ١}{٢ س^{٢} + س - ٥}$	٤	$\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \frac{٣ س^{٢} + ٢ س + ١}{٢ - ٦ س - س^{٢}}$
٥	$\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \frac{٢ س^{٤} - س^{٣} - ٤ س}{٣ س^{٥} - س^{٢} + ٧}$	٦	$\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \frac{٣ س^{٣} - ٢}{٤ - ٣ س^{٢}}$
٧	$\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \frac{٥ س^{٣} - ٢ س^{٢} - ٣}{٣ س^{٤} - س + ٧}$	٨	$\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \frac{س^{٤} + ٣ س - ١}{٦ س^{٣} - س^{٢} + ٧}$
٩	$\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \frac{٤ س^{٣} + ٥ س^{٢} - ٤}{(٣ س + ١)(٢ س^{٢} - ١)}$	١٠	$\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \frac{(٧ س - ١)(س^{٢} + ٥)}{(س + ٤)(٢ س^{٢} - س)}$
١١	$\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} (س - ١)}{س (س^{٢} + ٥ س - ٢)}$	١٢	$\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \frac{(٢ س + ٥)(س - ١)(س + ٣)}{س (س - ٤)(٣ س + ١)}$
١٣	$\underset{س \leftarrow \infty}{\text{تهـا}} \frac{س - ١}{\sqrt{٤ س^{٢} + ٧}}$	١٤	$\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{٩ س^{٢} - س - ١}}{٢ س + ٣}$
١٥	$\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[٣]{٢٧ س^{٣} - ٥ س + ٤}}{٤ س^{٢} - ٣}$	١٦	$\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{٢٥ س^{٢} - ٦}}{\sqrt[٣]{٨ س^{٣} - س}}$
١٧	$\underset{س \leftarrow \infty}{\text{تهـا}} \frac{\sqrt[٣]{س^{٣} - ٣ س + ١}}{\sqrt[٤]{١٦ س^{٤} - ٥}}$	١٨	$\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[٧]{س^{٧} - س^{٥} + س}}{\sqrt[٥]{س^{٥} - ٣ س}}$

١٩	$\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt[3]{8س^2 - 3س - 5}}{\sqrt[6]{س^4 - 5}}$	٢٠	$\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{س + 2} + \sqrt{س + 5}}{\sqrt{2س + 9}}$
٢١	$\lim_{س \to \infty} \frac{س\sqrt{س^4 - 2} - \sqrt{س^2 + 2}}{س^3 - 1}$	٢٢	$\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt[3]{8 - 27س^6}}{س \quad 4س^2 - 7}$
٢٣	$\lim_{س \to \infty} \frac{(2س^3 + 1)^2 + 6س^6}{(3س^3 - 1)^3 - 7س^6}$	٢٤	$\lim_{س \to \infty} \left(\frac{2س^2}{س + 1} - (2س - 3)\right)$
٢٥	$\lim_{س \to \infty} \left(\sqrt{س^2 + س} - \sqrt{س^2 - س}\right)$	٢٦	$\lim_{س \to \infty} \left(\sqrt{س^2 + 2} - \sqrt{س^2 - 1}\right)$
٢٧	$\lim_{س \to \infty} \left(\sqrt{س^2 + 3س} - \sqrt{س^2 - 1}\right)$	٢٨	$\lim_{س \to \infty} \left(\sqrt{س^2 - س} - \sqrt{4س^2 + س}\right)$
٢٩	$\lim_{س \to \infty} \left(\sqrt{س^2 + س - 1} - س\right)$	٣٠	$\lim_{س \to \infty} \left(\sqrt{س^2 - 3س + 4} - س\right)$
٣١	$\lim_{س \to \infty} \frac{3س^{-3} + 2س^{-1} + 1}{س^{-4} - 5س^{-5} + 2}$	٣٢	$\lim_{س \to \infty} \frac{5س^{-4} + 3س^{-2} - 4}{س^{-5} - 6س^{-3} - 2}$
٣٣	أوجد قيمة ك إذا كان : $\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt[3]{كس^3 + 3س}}{\sqrt{4س^2 + 6}} = -1$	٣٤	$\lim_{س \to \infty} \frac{3 \times 5^{س} + 2 \times 7^{س}}{9 \times 7^{س} - 6 \times 4^{س}}$

٣٥) إذا كانت : $د(س) = \frac{مس^2 - 3}{س^2 - ب س - 5}$ وكانت $\lim_{س \to \infty} د(س) = 4$

، $\lim_{س \to 2} د(س) = 3$ أوجد قيمة كل من : م ، ب